極大過剰決定系とその解層の対応について (代数解析学の最近の発展)

柏原, 正樹

数理解析研究所講究録
361巻 1979年 116-130

極大過剰決定系とその解層の対応について

京大数研　柏原正樹

与えられたモノドロミーに対して integrable connection を構成せよ、というのが有名な Hilbert の第21問題である。

ここでは、その拡張として、極大過剰決定系 (holonomic systems) と constructible sheaves が1-1に対応する事を述べる。

§1 問題の定式化

X を n 次元複素多様体，$\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{D}_X^\infty$) を X 上の有限階 (resp. 無限階) 微分作用素のなす層とする。

<u>定義1.1</u>　$\mathcal{D}_X^\infty$-Module $\mathcal{N}$ が holonomic であるとは、局所的に、holonomic $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ が存在して $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\infty \left(\underset{\text{def.}}{=} \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}\right)$ が成立する事である。

[1] によれば，次の事実がしられている。

命題 1.2. $\mathcal{N}$ が holonomic $\mathcal{D}^\infty$-Module なら $\mathcal{N}$ は R.S. (regular singularity の略) をもつ holonomic $\mathcal{D}$-sub-Module $\mathcal{M}$ を含み，$\mathcal{N} \simeq \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}$ が成立する。しかも このような $\mathcal{M}$ は 1 つしかない。

この命題によれば，holonomic $\mathcal{D}^\infty$-Modules のつくる category と R.S. をもつ holonomic $\mathcal{D}_X$-Modules のつくる category は 1-1 に対応する。

さて，$\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ によって，$\mathcal{D}_X$-Modules のつくる abelian category を，$\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^\infty)$ によって $\mathcal{D}_X^\infty$-Modules のつくる abelian category をあらわそう。更に，$D(\mathcal{D}_X)$ で $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ の derived category をあらわす。即ち，$D(\mathcal{D}_X)$ の object とは $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ の complex

$$\mathcal{M}^\cdot : \cdots \to \mathcal{M}^{-1} \to \mathcal{M}^0 \to \mathcal{M}^1 \to \cdots$$

であり，$\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{N}^\cdot \in \mathrm{Ob}(D(\mathcal{D}_X))$ ($\in D(\mathcal{D}_X)$ の objects の集合) の時，

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{N}^\cdot) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\cdot & & \mathcal{N}^\cdot \\ & {\scriptstyle f}\searrow \;\; \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & \mathcal{L}^\cdot & \end{array} ;\ g \text{ は quasi-isomorphism} \right\} \Big/ \sim$$

但し g が quasi-isomorphism とは任意の k に対して $\mathcal{H}^k(\mathcal{N}^\cdot) \to \mathcal{H}^k(\mathcal{L}^\cdot)$ が同型となることである。又、$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\cdot & & \mathcal{N}^\cdot \\ & {\scriptstyle f}\searrow \;\; \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & \mathcal{L}^\cdot & \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^\cdot & & \mathcal{N}^\cdot \\ & {\scriptstyle f'}\searrow \;\; \swarrow{\scriptstyle g'} & \\ & \mathcal{L}'^\cdot & \end{array} \right\}$

という同値関係を、或る $\mathcal{L}''^\cdot$ と $h : \mathcal{L}^\cdot \to \mathcal{L}''^\cdot$, $h' : \mathcal{L}'^\cdot \to \mathcal{L}''^\cdot$ という2つの quasi-isomorphisms が存在して, $hg = h'g'$, $hf = h'f'$ が成立するという条件でいれる。

$D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ によって、有限コの j を除いて $\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^\cdot) = 0$ が成立し, 任意の j に対して $\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^\cdot)$ が R.S. をもつ holonomic $\mathcal{D}_X$-Module となるような $\mathcal{M}^\cdot$ からなる $D(\mathcal{D}_X)$ の full subcategory をあらわす。

$D(\mathcal{D}_X)$ と同様に, $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^\infty)$ の derived category $D(\mathcal{D}_X^\infty)$ も定義できる。$D^b_h(\mathcal{D}_X^\infty)$ によって, 有限コの j を除いて $\mathcal{H}^j(\mathcal{N}^\cdot) = 0$ が成立し, 任意の j に対して $\mathcal{H}^j(\mathcal{N}^\cdot)$ が holonomic

$\mathcal{D}_X^\infty$-Moduleとなるような$\mathcal{M}^\bullet$からなる$D(\mathcal{D}_X^\infty)$のfull subcategoryをあらわす。

Mod(X)によってX上の$\mathbb{C}$-vector spacesのsheavesからなるabelian categoryとし，D(X)でMod(X)のderived categoryをあらわす。

<u>定義1.3.</u>　X上の$\mathbb{C}$-vector spacesの層Fが$\mathbb{C}$-constructibleとは，あるXの閉解析集合の減少列$\{X_j\}_{j=0,1,\cdots}$が存在して次の2条件を満たすことである。

(1) $X = X_0$, $\cap X_j = \phi$

(2) $F|_{X_j - X_{j+1}}$ は $X_j - X_{j+1}$ 上の有限階のlocally constant sheaf（即ち，局所的には $F|_{X_j-X_{j+1}} \cong \mathbb{C}^{\nu}_{X_j - X_{j+1}}$）

さて，前の構成法と同様にして，$D_c^b(X)$を，有限コのjを除いて$\mathcal{H}^j(F^\bullet)=0$が成立し，任意の$j$に対して$\mathcal{H}^j(F^\bullet)$が$\mathbb{C}$-constructibleとなるような$F^\bullet$からなるD(X)のfull

subcategory とする。
こうして3つの category $D_c^b(X)$, $D_{rs}^b(\mathcal{D}_X)$, $D_h^b(\mathcal{D}_X^\infty)$ が定義された。その間の関連を次にしらべよう。

$\mathcal{M}^\cdot \in \mathrm{Ob}(D_{rs}^b(\mathcal{D}_X))$ に対して,

(1.1) $\Phi(\mathcal{M}^\cdot) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{O}_X)$

とおく。$\mathcal{O}_X$ の任意の $\mathcal{D}_X$-injective resolution $\mathcal{I}^\cdot$ をとり, double complex $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{I}^\cdot)$ に associate した simple complex が, (1.1) の右辺の意味である。これは, $D(X)$ における同型を除いて, $\mathcal{I}^\cdot$ のとり方によらない。

同様に $\mathcal{N}^\cdot \in \mathrm{Ob}(D_h^b(\mathcal{D}_X^\infty))$ に対して

(1.2) $\Phi^\infty(\mathcal{N}^\cdot) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{O}_X)$

と定義する。

更に $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(D^b_c(X))$ に対して

$$(1.3)\quad \Psi^\infty(F^\bullet) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^\bullet, \mathcal{O}_X)$$

とおく。その時，次の定理が知られている（[1]，[2]）。

<u>定理 1.4.</u> (1) Φ (resp. Φ^∞) は $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$) から $D^b_c(X)$ への contravariant functor，Ψ^∞ は $D^b_c(X)$ から $D(\mathcal{D}^\infty_X)$ への contravariant functor である。

(2) $\Phi = \Phi^\infty \circ J$. 但し J は $\mathcal{M}^\bullet \mapsto \mathcal{D}^\infty_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\bullet$ で定義される $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ から $D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$ への functor。

(3) $\Psi^\infty \circ \Phi^\infty = \mathrm{id}$.

(4) 任意の $\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}'^\bullet \in \mathrm{Ob}(D^b_{rs}(\mathcal{D}_X))$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{M}'^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{D}^\infty_X)}(J(\mathcal{M}^\bullet), J(\mathcal{M}'^\bullet))$$

我々の目標は $D^b_c(X)$ から $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ への contravariant functor Ψ を構成して

$$\Psi\Phi = id, \quad \Phi\Psi = id$$

を示すことにある。この目標が達成されれば、Φ, Φ^∞, Ψ, Ψ^∞, J はすべて category の equivalence で、3つの category $D^b_c(X)$, $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$, $D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$ は互に同型となる。

直観的にいえば、Φ は微分方程式系に対してその解を対応させる functor であり、Ψ は与えられた monodromy をもつ微分方程式系を構成する functor である。

§2 Ψ の構成

以下に述べる Ψ の構成法を理解する為に、Ψ^∞ を具体的にあらわしてみよう。

Ψ^∞ は、$\mathcal{O}_X$ の flabby $\mathcal{D}^\infty_X$-Modules による resolution $\mathcal{I}^\cdot$ を勝手にとって

$$\Psi^{\infty}(F^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, I^{\cdot})$$

で定義される。$I^{\cdot}$として例えばDaulbeault complex

$$\mathcal{B}_X^{\cdot} : \mathcal{B}_X^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{B}_X^1 \to \cdots \to \mathcal{B}_X^n$$

をとる事ができる。但し，$\mathcal{B}_X^p$は、X上のhyperfunctionを係数とする(0,p)-formのなす層，$\bar{\partial}$はantiholomorphicな変数に関する外微分である。ここでhyperfunctionの層がflabbyである事に注意しよう。
従って

$$\Psi^{\infty}(F^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathcal{B}_X^{\cdot})$$

である。
さて$\Psi(F^{\cdot})$は$\Psi^{\infty}(F^{\cdot})$のsubcomplexで$\mathcal{D}_X$-Moduleからなるものでなければならない。
そこで$\mathcal{B}_X^{\cdot}$のかわりに，distributionを係数とする(0,p)-formの層$\mathcal{D}b_X^p$からなるDaulbeault complex

$$\mathcal{D}b_X^{\cdot} : \mathcal{D}b_X^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}b_X^1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \to \mathcal{D}b_X^n$$

をもちいて $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot)$ を $\Psi(F^\cdot)$ としてとる事が考えられる。しかしながら，これはうまくいかない。というのは，$F^\cdot \to G^\cdot$ が quasi-isomorphism としても $\mathrm{Hom}(F^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot) \leftarrow \mathrm{Hom}(G^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot)$ は，quasi-isomorphism であるとは限らぬからである。（$\mathcal{D}b_X^\cdot$ でなくて $\mathcal{B}_X^\cdot$ の時は，各 $\mathcal{B}_X^p$ が flabby 故このような不都合は生じない）。従って，正しい $\Psi(F^\cdot)$ を定義するにはこの $\Psi(F^\cdot)$ を修正する要がある。

§3 Moderate homomorphism

まず，広中によって導入された subanalytic set の概念を復習しよう（[3]）

<u>定義3.1</u> 実解析的多様体 M の subset Z が M の点 x で subanalytic とは，実解析的多様体 N_j^ν $(\nu=1,2,\ j=1,\cdots,m)$ 及び，N_j^ν から M への proper real analytic

map f_j^ν があって，x の或る近傍 U に対して

$$Z \cap U = \bigcup_j \left(f_j^1(N_j^1) - f_j^2(N_j^2) \right)$$

となる事である。任意の点で subanalytic の時，単に subanalytic と呼ぶ。

先に導入した $\mathbb{C}$-constructible sheaf の定義において analytic を subanalytic におきかえる事によって次の定義を得る。

定義 3.2　M 上の $\mathbb{C}$-vector spaces の層 F が $\mathbb{R}$-constructible とは，M の閉 subanalytic subsets $\{M_j\}_{j=0,1,\ldots}$ の減少列があって次の諸条件を満たすことである。

(1) $M_0 = M$, $\cap M_j = \phi$ 且つ $\{M_j\}$ は局所有限

(2) $F|_{M_j - M_{j+1}}$ は locally constant sheaf.

さて F を $\mathbb{R}$-constructible sheaf とした時 M-Hom $(F, \mathcal{D}b_M)$ を次の様に定義する。但し以下 $\mathcal{D}b_M$ は M 上の distributions の層である。M の開集合 U に対して

$$\Gamma(U; M\text{-}Hom(F, \mathcal{D}b_M))$$

$$= \{\varphi \in \Gamma(U; Hom(F, \mathcal{D}b_M));$$

任意の U の relatively compact open subanalytic subset V と $s \in F(V)$ に対して或る U 上定義された distribution u があって $\varphi(s) = u|_V$ となる $\}$

上のように定義した時, 次の命題が成立する (本質的には Lojaciewicz の不等式が subanalytic set に対しても成立する事による)

命題 3.3 $\quad 0 \to F' \to F \to F'' \to 0$

を $\mathbb{R}$-constructible sheaves からなる exact sequence とする時

$$0 \to M\text{-}Hom(F'', \mathcal{D}b_M) \to M\text{-}Hom(F, \mathcal{D}b_M) \to M\text{-}Hom(F', \mathcal{D}b_M) \to 0$$

は exact sequence である。

即ち，$M\text{-}Hom(*, \mathcal{D}b_M)$ は $\mathbb{R}$-constructible sheaves のつくる abelian category 上で exact な functor である。従って $Hom(*, \mathcal{D}b_M)$ のかわりに $M\text{-}Hom(*, \mathcal{D}b)$ をもちいて前述の $\Phi(F^{\cdot})$ を修正すれば正しい Φ の定義を得るだろう。

さて，X を複素多様体，$F^{\cdot}$ を $D_c^b(X)$ の object とする。その時，或る $\mathbb{R}$-constructible sheaves からなる bounded complex $G^{\cdot}$ と $D_c^b(X)$ における isomorphism $F^{\cdot} \simeq G^{\cdot}$ が存在する。

そこで

$$\Psi(F^\cdot) = M\text{-}Hom(G^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot)$$

と定義する。但し，$M\text{-}Hom(G^p, \mathcal{D}b_X^q)$ は $M\text{-}Hom(G^p, \mathcal{D}b_X)$ と同様にして定義された $Hom(G^p, \mathcal{D}b_X^q)$ の subsheaf である。

$\mathcal{D}b_X^p$ が $\mathcal{D}_X$-Module であり，$\bar{\partial}$ が $\mathcal{D}_X$-linear となる事から $M\text{-}Hom(F^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot)$ は $\mathcal{D}_X$-Module のつくる complex となる。

一方 $M\text{-}Hom(*, \mathcal{D}b_X^p)$ は命題 3.3と同様の性質 (exactness) を満足するから，$M\text{-}Hom(G^\cdot, \mathcal{D}b_X^\cdot)$ は $D(\mathcal{D}_X)$ の同型を除いて $G^\cdot$ によらない。従って Ψ は well-defined な $D_c^b(X)$ から $D(\mathcal{D}_X)$ への contravariant functor となる。

こうして構成された Ψ は所期の性

質をみたす。即ち次の定理が成り立つ。

定理 3.4 $\Psi(D^b_c(X)) \subset D^b_{RS}(\mathcal{D}_X)$

且つ $\Psi\Phi = id$. $\Phi\Psi = id$

従って既に述べた様に上の定理から次の定理が導かれる

定理 $D^b_c(X)$, $D^b_{RS}(\mathcal{D}_X)$, $D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$ は $\Phi, \Phi^\infty, \Psi, \Psi^\infty, J$ によって互に同型である。

定理3.4は広中の特異点解消定理をもちいて特異点が normal crossing の場合に帰着させることによって証明される。その詳細は略する。

文献 [1] On holonomic systems of micro differential equations III — Systems with regular singularities , Preprint (with T. Kawai).

[2] On the maximally overdetermined system of linear differential equations ,I. Publ. RIMS, 10, 563-579, 1975.

[3] 広中平祐 Introduction to real analytic sets and real analytic map, Instituto Mathematico "L. Tonelli" dell Universita' di Pisa , 1973.